Ildkula etter en kjernefysisk eksplosjon

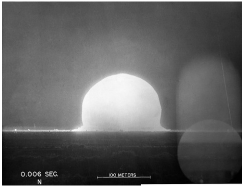
Jørgen Endal
URL: https://folk.ntnu.no/jorgeen

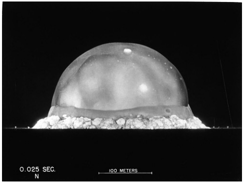
Institutt for matematiske fag, NTNU

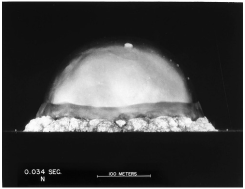
23 november 2022

Onsdagsseminar, NTNU

Ildkula umiddelbart etter en kjernefysisk eksplosjon



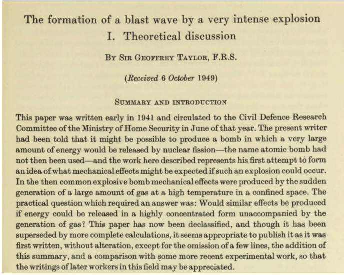




Testeksplosjonen *Trinity*, New Mexico, 1945.

Bildene er hentet fra *Los Alamos National Laboratory*.

For de interesserte:



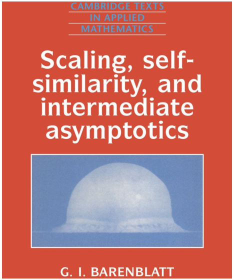
The formation of a blast wave by a very intense explosion
I. Theoretical discussion

By Sir Geoffrey Taylor, F.R.S.

(*Received 6 October* 1949)

Summary and introduction

This paper was written early in 1941 and circulated to the Civil Defence Research Committee of the Ministry of Home Security in June of that year. The present writer had been told that it might be possible to produce a bomb in which a very large amount of energy would be released by nuclear fission—the name atomic bomb had not then been used—and the work here described represents his first attempt to form an idea of what mechanical effects might be expected if such an explosion could occur. In the then common explosive bomb mechanical effects were produced by the sudden generation of a large amount of gas at a high temperature in a confined space. The practical question which required an answer was: Would similar effects be produced if energy could be released in a highly concentrated form unaccompanied by the generation of gas? This paper has now been declassified, and though it has been superseded by more complete calculations, it seems appropriate to publish it as it was first written, without alteration, except for the omission of a few lines, the addition of this summary, and a comparison with some more recent experimental work, so that the writings of later workers in this field may be appreciated.



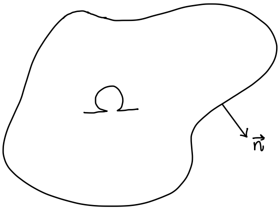
G. I. Barenblatt. *Scaling, self-similarity, and intermediate asymptotics*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

Varmeligninga

Vi skal utlede varmeligninga på det euklidske rommet $\mathbb{R}^N$.
Vi lar $u = u(x,t)$ være varmetettheten i $\mathbb{R}^N$.

For hvert område $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ har vi prinsippene:

- Varme kan ikke oppstå eller bli ødelagt.
- Varmen øker når mer varme strømmer inn gjennom $\partial\Omega$.
- Varmen minker når varme strømmer ut gjennom $\partial\Omega$.



Varmeligninga

Vi skal utlede varmeligninga på det euklidske rommet $\mathbb{R}^N$.
Vi lar $u = u(x, t)$ være varmetettheten i $\mathbb{R}^N$.

For hvert område $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ har vi prinsippene:

- Varme kan ikke oppstå eller bli ødelagt.
- Varmen øker når mer varme strømmer inn gjennom $\partial\Omega$.
- Varmen minker når varme strømmer ut gjennom $\partial\Omega$.

La $\boldsymbol{F}$ være flukstettheten. Siden normalvektoren $\boldsymbol{n}$ peker ut av Ω, får vi:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_\Omega u \, \mathrm{d}V = - \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S,$$

$$\int_\Omega \partial_t u \, \mathrm{d}V = - \int_\Omega \nabla \cdot \boldsymbol{F} \, \mathrm{d}V,$$

$$\int_\Omega \left(\partial_t u + \nabla \cdot \boldsymbol{F}\right) \mathrm{d}V = 0 \qquad \text{for alle } \Omega \subseteq \mathbb{R}^N.$$

Varmeligninga

Vi skal utlede varmeligninga på det euklidske rommet $\mathbb{R}^N$.
Vi lar $u = u(x,t)$ være varmetettheten i $\mathbb{R}^N$.

For hvert område $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ har vi prinsippene:

- Varme kan ikke oppstå eller bli ødelagt.
- Varmen øker når mer varme strømmer inn gjennom $\partial\Omega$.
- Varmen minker når varme strømmer ut gjennom $\partial\Omega$.

La $\boldsymbol{F}$ være flukstettheten. Siden normalvektoren $\boldsymbol{n}$ peker ut av Ω, får vi:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u \,\mathrm{d}V = -\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S,$$

$$\int_\Omega \partial_t u\,\mathrm{d}V = -\int_\Omega \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}V,$$

$$\partial_t u(x,t) + \nabla\cdot\big(\boldsymbol{F}(x,t)\big) = 0 \qquad \text{for alle } (x,t)\in\mathbb{R}^N\times(0,T).$$

Varmeligninga

$$\partial_t u(x,t) + \nabla \cdot \big(\boldsymbol{F}(x,t)\big) = 0 \qquad \text{for alle } (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,T).$$

Hva kan $\boldsymbol{F}$ være?
Varme strømmer fra områder med høy konsentrasjon til områder med lav konsentrasjon.
Vi vet at gradienten ∇u peker i retningen som angir vekst for u.
Dette gir:

$$\boldsymbol{F} = -C\nabla u,$$

og (med $C = 1$)

$$\partial_t u(x,t) - \Delta u(x,t) = 0 \qquad \text{for alle } (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,T).$$

Varmeligninga ($N = 1$)

$$\partial_t u(x,t) + \nabla \cdot \big(\boldsymbol{F}(x,t)\big) = 0 \qquad \text{for alle } (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,T).$$

Hva kan $\boldsymbol{F}$ være?
Varme strømmer fra områder med høy konsentrasjon til områder med lav konsentrasjon.
Vi vet at gradienten ∇u peker i retningen som angir vekst for u.
Dette gir:

$$\boldsymbol{F} = -C\nabla u,$$

og (med $C = 1$)

$$\partial_t u(x,t) - \partial^2_{xx} u(x,t) = 0 \qquad \text{for alle } (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T).$$

Varmeligninga ($N = 1$)

Vi skal nå løse varmeligninga ved hjelp av

$$u_\lambda(x,t) = \lambda^\alpha u(\lambda^\beta x, \lambda^\gamma t), \qquad \lambda, \alpha, \beta, \gamma > 0.$$

Dette gir

$$K(x,t) = t^{-\alpha} v(y(x,t)), \qquad \text{der } y(x,t) = t^{-1/2} x,$$

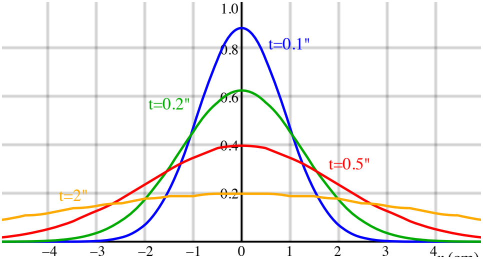
og v må løse

$$\alpha v(y) + \frac{1}{2} y v'(y) + v''(y) = 0, \qquad \text{for alle } y \in \mathbb{R}.$$

$$K(x,t) = \frac{C}{t^{\frac{1}{2}}} \exp\Big(-\frac{x^2}{4t}\Big).$$

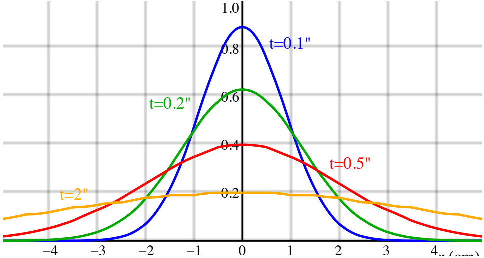
løser altså

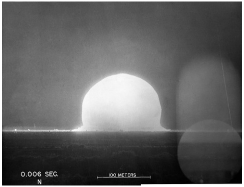
$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) = \partial_{xx}^2 u(x,t) & \text{for } (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T), \\ u(x,0) = \delta_0(x) & \text{for } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

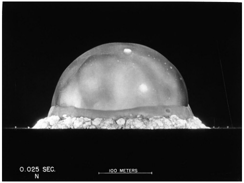


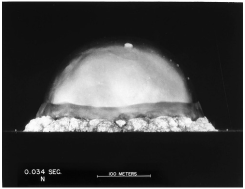
Figur fra *Wikipedia*.

Varmeligninga ($N = 1$), en god modell?









Varmeligninga ($N = 1$), revisjon

$$\partial_t u(x,t) + \nabla \cdot \big(\boldsymbol{F}(x,t)\big) = 0 \qquad \text{for alle } (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T).$$

$$\boldsymbol{F} = -C\nabla u, \qquad \text{hvor } C \text{ var konstant lik } 1.$$

Hva om vi lar C avhenge av u?

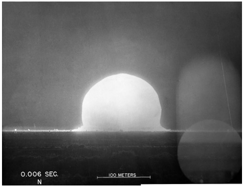
Hvis vi lar $C = C(u) = u^{m-1}$, får vi den såkalte porøst medium-ligninga:

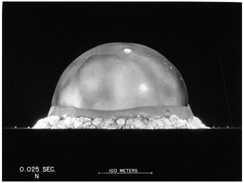
$$\partial_t u(x,t) - \partial_{xx}^2 (u(x,t))^m = 0 \qquad \text{for alle } (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T).$$

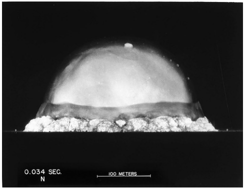
Porøst medium-ligninga ($N = 1$)

$$\partial_t u(x,t) - \partial_{xx}^2 (u(x,t))^m = 0 \qquad \text{for alle } (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T).$$

Og når $m \approx 6$, vil denne ligninga være en god modell for:







G. I. Barenblatt. *Scaling, self-similarity, and intermediate asymptotics*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

Porøst medium-ligninga ($N = 1$)

Matematisk sett er det også interessant å legge merke til at vi kan finne ei løsning på samme måte som for varmeligninga!
Igjen kan vi se på

$$u_\lambda(x,t) = \lambda^\alpha u(\lambda^\beta x, \lambda^\gamma t), \qquad \lambda, \alpha, \beta, \gamma > 0.$$

Dette vil nå gi

$$K(x,t) = t^{-\bar{\alpha}} v(y(x,t)), \quad \text{der } y = t^{-\bar{\beta}} x \text{ og } \bar{\alpha}(m-1) + 2\bar{\beta} = 1,$$

og v må løse

$$\bar{\alpha} v(y) + \bar{\beta} y (v(y))' + ((v(y))^m)'' = 0, \qquad \text{for alle } y \in \mathbb{R}.$$

Porøst medium-ligninga ($N = 1$)

$$K(x,t) = t^{-\bar{\alpha}}\left(\max\left\{0, C_1 - C_2 x^2 t^{-2\bar{\beta}}\right\}\right)^{\frac{1}{m-1}}.$$

løser altså

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) = \partial_{xx}^2 (u(x,t))^m & \text{for } (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T), \\ u(x,0) = \delta_0(x) & \text{for } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Synes du foredraget var interessant?
Jeg tilbyr bachelor-/masteroppgaver innenfor dette temaet.

Takk for oppmerksomheten!